UNIDAD III. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

TEMA: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y SUS APLICACIONES

Teorema fundamental del cálculo y sus aplicaciones

El Teorema Fundamental del Cálculo es el teorema más importante del cálculo infinitesimal.

Teorema: Si **f** es una función continua y No-negativa para toda x en el intervalo **[a, b]**, entonces el área A delimitada por **y = f(x)**, y el eje **x** desde **a** hasta **b** está dada por:

$$A = \int_a^b f\,(x)dx = F\,(x)\Big|_a^b = F\,(b) - F\,(a)$$

Donde **F** es una antiderivada de **f**.

En palabras, el teorema fundamental del cálculo nos dice que para calcular el cambio total desde **a** hasta **b** de una cantidad que cambia continuamente con razón de cambio: $f = \frac{df}{dx}$ **,** usamos F(b) - F(a).

Integración aproximada: regla del trapecio

La **regla del trapecio** es un método de integración numérica, es decir, un método para calcular aproximadamente el valor de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

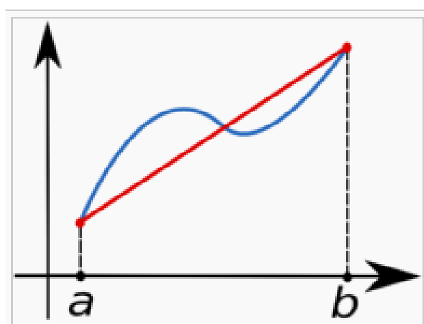
La regla se basa en aproximar el valor de la integral de *f*(*x*) por el de la función lineal que pasa a través de los puntos (*a*, *f*(*a*)) y (*b*, *f*(*b*)). La integral de ésta es igual al área del trapecio bajo la gráfica de la función lineal. Se sigue que.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

y donde el término error corresponde a:

$$-\frac{(b-a)^3}{12}\,f^{(2)}(\xi)$$

Siendo ξ un número perteneciente al intervalo [*a*, *b*].



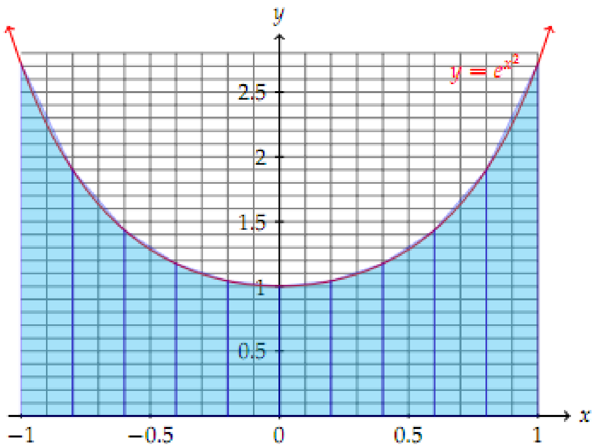
La función f(x) (en azul) es aproximada por la función lineal (en rojo).

Ejemplo1:

Utiliza la regla del trapecio para aproximar la integral definida: $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\, dx$

El cálculo de esta integral de manera analítica es imposible por los métodos que se ha estudiado

Así que definiendo n = 10



i	dA
1	0.46148
2	0.33298
3	0.26068
4	0.22143
5	0.20408
6	0.20408
7	0.22143
8	0.26068
9	0.33298
10	0.46148
Total:	2.96131

Fig.14 Representación gráfica de n = 10

Y haciendo n = 20, obtenemos

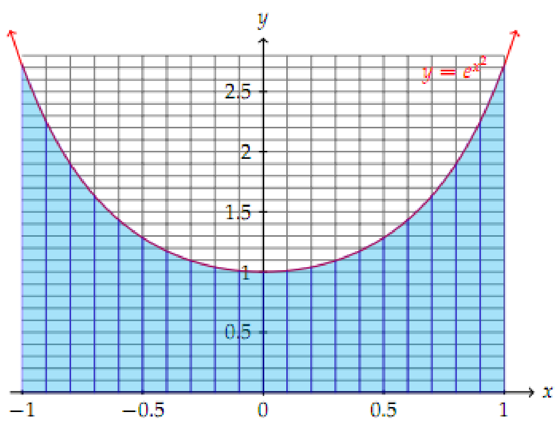


Fig. 15. Representación grafica de n=20

Valor de esta aproximación es: 2.93435 unidades de área.

El valor del área buscada (correcto a 8 decimales) es de 2.925303492 unidades de área.

Observa que para calcular el área dA de un trapecio se utiliza la fórmula:

$$dA = \left(\frac{f(xi) + f\,(xi + \Delta x)}{2}\right) * \Delta x$$

Y para calcular la aproximación del área debajo de la curva usando trapecios en lugar de rectángulos se ocupa la sumatoria de todas las áreas de los (n) trapecios que se han dibujado de bajo de la curva:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(xi) + f\ (xi + \Delta x)}{2} \right) * \Delta x$$

Donde $\Delta x = (\ b - a\ ) /\ n$

Si definimos $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, se puede reescribir la expresión anterior de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(xi) + f\ (xi + \Delta x)}{2} \right) * \Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(xi) + f\ (xi + 1)}{2} \right) * \Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \ (\ [\ f(x1) + f\ (x2)]\ + [f\ (x2) + f\ (x3)] + \ ... + [f\ (x_{n-1}) + f\ (x_n)])$$

$$= \frac{\Delta x}{2} * \ [\ f(x1) + 2f\ (x2)]\ + 2f\ (x3)] + \ ... + 2f\ (x_{n-1}) + f\ (x_n)]$$

$$= (\ \Delta x\ ) * \left(\ f\ (x2) + f\ (x3) + \cdots + f\ (x_{n-1})\right) + (\Delta x) * (\frac{f\ (x_1) + f\ (x_n)}{2})$$