Funciones racionales

Componentes polinomiales de una función racional

Son las funciones que están formadas por el cociente de dos funciones polinomiales, son de la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales sólo que $Q(x) \neq 0$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo se encuentra el dominio de algunas funciones racionales, además, se muestra la gráfica de cada una de ellas.

<u>Ejemplo:</u>

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales, menos aquellos valores que indefinan la función, esto es, cuando $x^2 - x + 1 = 0$.

Para encontrar la solución de la ecuación, se puede utilizar la fórmula general.

$$a = 1$$

$$b = -1$$

$$c = 1$$

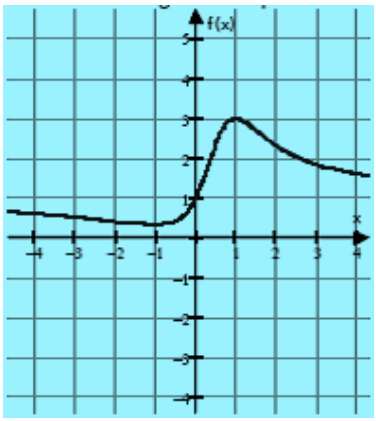
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Con el resultado anterior, se concluye que no existen números reales que sean solución de la ecuación, por lo tanto, el dominio de la función son todos los números reales. Su gráfica se presenta en la siguiente figura.



Función racional reducible. Dentro de las funciones racionales se encuentran las que son reducibles, es decir, aquellas que tienen factores iguales en el numerador y denominador, de tal manera que se pueden eliminar y mostrar la función simplificada.

<u>Ejemplo:</u>

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Es esencial determinar primero el dominio de la función, la cual parte de encontrar los ceros del denominador, el cual, en este caso se convierte en cero cuando $x = -2$, por lo tanto, el dominio es:

$$\mathrm{D}om\ \delta - \{-2\}$$

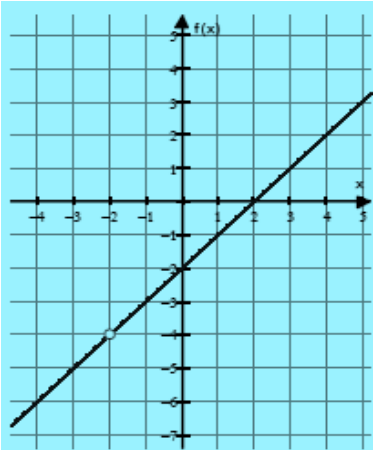
Observando la función, se deduce que el denominador es una **diferencia de cuadrados**, y se factoriza mediante ***binomios conjugados***.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = x - 2$$

Quedando:

$$f(x) = x - 2 \text{ Con } x \neq 2$$

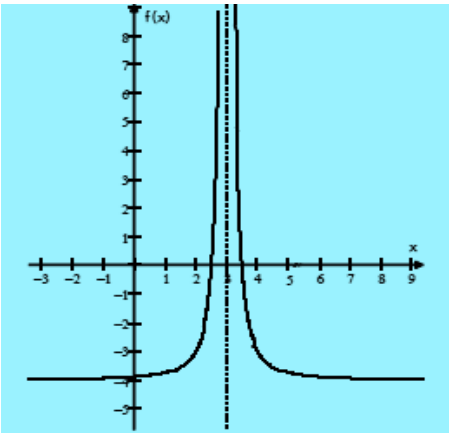
La función reducida es una recta con pendiente uno y ordenada en el origen −2, su grafica se muestra en la siguiente figura.



Asíntotas de funciones racionales (Horizontales, Verticales, Oblicuas)

Una recta es asíntota de una curva (la función racional) si la distancia entre un punto sobre la curva y la recta se aproxima a cero a medida que el punto se aleja del origen de coordenadas.
En otras palabras, las asíntotas son líneas que nunca tocan a la función pero se encuentran muy cercanas a ella.

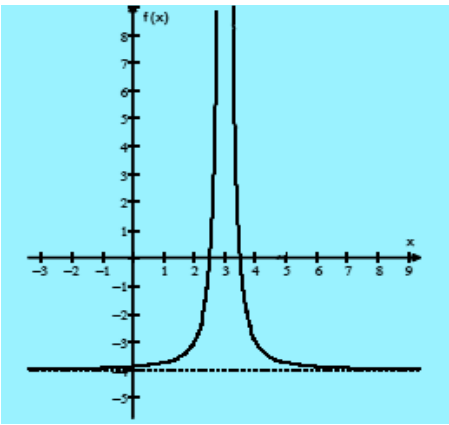
Asíntotas verticales. Son las rectas auxiliares que son paralelas al eje Y, como se muestra en la siguiente figura.



La función que describe la gráfica anterior es $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} - 4$ y su indefinición es cuando$x = 3$, la cual representa precisamente la asíntota vertical, por lo tanto, las asíntotas verticales son las indefiniciones que puede tener una función.

La ecuación de la recta es$x - 3 = 0$.

Asíntotas horizontales. Estas son las rectas auxiliares paralelas al eje X. Utilizando la función anterior para determinar las asíntotas horizontales se observa la posición de la misma.



Para conocer la posición de la asíntota horizontal, es necesario sustituir valores extremos, es decir, muy grandes o pequeños.
Analizando la función, para valores que se acercan a infinito, se deduce lo siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} - 4$$

El término $\frac{1}{(x-3)^2}$ cuando x se acerca o tiende a∞, se aproxima a cero, dado que el numerador es 1 y el denominador cada vez es más grande, por lo tanto, el valor de la función cuando $x \to \infty$(x tiende a ∞) es -4, porlo que la ecuación de la asíntota horizontal es:

$$f(x) = -4 \text{ Ó}$$

$$y = -4$$
$$y + 4 = 0$$

Ahora, si se quiere conocer las asíntotas horizontales de una función de la cual no es tan sencillo visualizar su comportamiento en valores extremos, se tendrá que aplicar el algoritmo de la división y expresar en forma de factores y residuo, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x & x+3 \\ & \underline{-x} \\ & 0+3 \end{array}$$

Ejemplo:

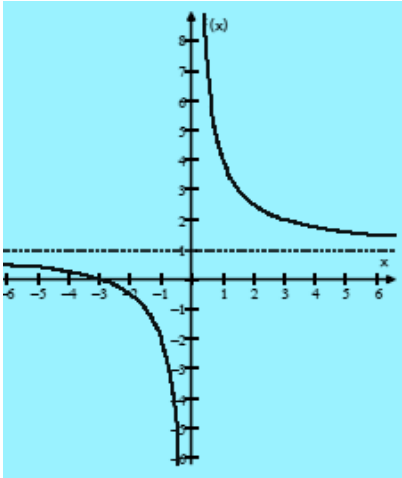
Expresar la ecuación de la asíntota horizontal de la función$f(x) = \frac{x+3}{x}$.
Por lo tanto, la función se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{x+3}{x}$$
$$f(x) = 1 + \frac{3}{x}$$

Así que cuando$x \to \infty$, la función se acerca a 1, por lo tanto, laecuación de la asíntota horizontal es:

$$f(x) = 1 \text{ Ó}$$
$$y = 1$$
$$y - 1 = 0$$

Si se desea visualizar la gráfica, también se considerará la asíntota vertical, la cual es cuando se indefine la función, y esto es, cuando $x = 0$.



Asíntotas oblicuas.

Son rectas auxiliares inclinadas y éstas se generan en funciones racionales donde el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

En este caso, al realizar el algoritmo de la división, se obtiene como cociente una recta.

Ejemplo. Determinar la ecuación de la asíntota de la función$f(x) = \frac{x^3-4}{x^2}$

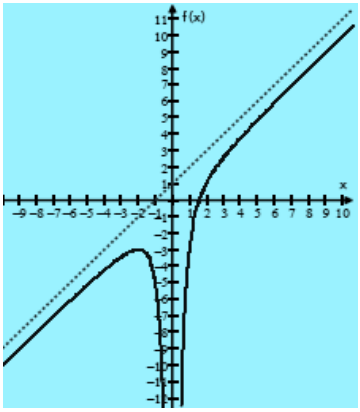
Al realizar el algoritmo de la división se obtiene:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x \\ \hline x^2 & x^3 - 4 \\ & -x^3 \\ \hline & 0 \quad -4 \end{array}$$

La función se expresa así:

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

Cuando $x \to \infty$ la parte de la función $-\frac{4}{x^2}$ se aproxima a cero, por lo tanto, la función se convierte en:

$$f(x) = x \text{ Ó}$$
$$y = x$$

La asíntota oblicua es la función identidad. También tiene una asíntota vertical, cuando $x = 0$, porque es cuando se indefine la función, por lo tanto, su gráfica queda de la siguiente forma: