ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

CONVERSIÓN DE FORMA ORDINARIA A FORMA GENERAL.

La **ecuación ordinaria** de la circunferencia **con centro en el origen** y radio r, tiene la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Para representar esta ecuación en su **forma general**, el miembro derecho pasa al miembro izquierdo igualando a cero la ecuación, así:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

<u>EJEMPLO</u>: Convertir las ecuaciones ordinarias de la circunferencia indicadas a su forma general.

FORMA ORDINARIA	FORMA GENERAL
a) $x^2 + y^2 = 4$	a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
b) $2x^2 + 2y^2 = 10$	b) $2x^2 + 2y^2 - 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 100$	c) $x^2 + y^2 - 100 = 0$
d) $x^2 + y^2 = 8$	d) $x^2 + y^2 - 8 = 0$
e) $5x^2 + 5y^2 = 125$	e) $5x^2 + 5y^2 - 125 = 0$
f) $20x^2 + 20y^2 = 8000$	f) $20x^2 + 20y^2 - 8000 = 0$

La **ecuación ordinaria** de la circunferencia **con centro fuera del origen** y radio r, Tiene la forma: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Desarrollando esta ecuación e igualando a cero se obtiene la **forma general** de la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen como a continuación se indica:

$$\mathbf{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$
$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$
$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

Haciendo: $-2h = D$, $-2k = E$ y $h^2 + k^2 - r^2 = F$

Tenemos la ecuación de la circunferencia en su forma general: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

RECUERDA:

Para desarrollar un binomio al cuadrado $(a + b)^2$, se eleva el primer término al cuadrado, se suma el doble producto del primero por el segundo termino y se suma el cuadrado del segundo término:

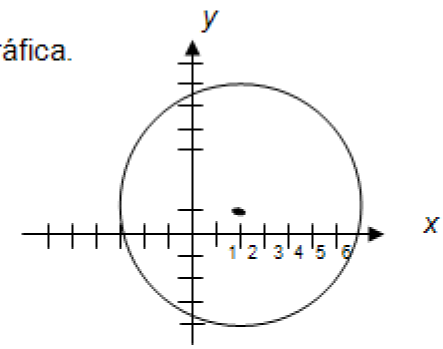
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO: Encontrar la ecuación (forma ordinaria y general) de la circunferencia con centro *C*(2, 1) y radio.

r = 5. Graficar

Gráfica.



Elementos conocidos:

C(2, 1)
r = 5

Ecuación (Forma ordinaria):

Fórmula: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Sustitución: $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$

Ecuación ordinaria: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

Ecuación (Forma general):

A partir de la ecuación ordinaria: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$
Desarrollando los binomios al cuadr $x^2-4x+4+y^2-2y+1=25$
Igualando a cero la ecuación: $x^2-4x+4+y^2-2y+1-25=0$
Ordenando términos: $x^2+y^2-4x-2y+4+1-25=0$

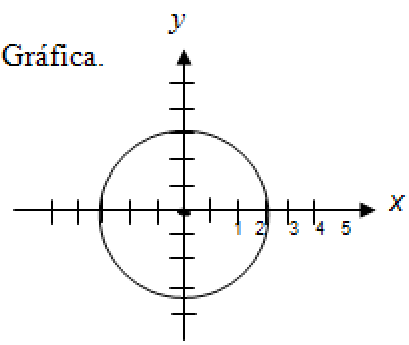
Ecuación general: $\boldsymbol{x^2+y^2-4x-2y-20=0}$

EJERCICIOS RESUELTOS

[1] Encontrar la ecuación (forma ordinaria y general) de la circunferencia con centro en el origen y radio indicado. Graficar.

a) r = 3

Gráfica.



Fórmula: $x^2+y^2=r^2$

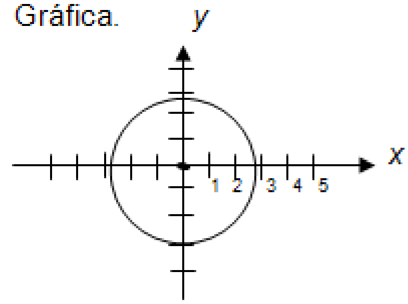
Sustitución: $x^2+y^2=(3)^2$

Ecuación (Forma ordinaria): $x^2+y^2=9$

Ecuación (Forma general): $x^2+y^2-9=0$

b) $r = \sqrt{8}$

Gráfica.



Fórmula: $x^2 + y^2 = r^2$

Sustitución: $x^2 + y^2 = (\sqrt{8})^2$

Ecuación (**Forma ordinaria**): $x^2 + y^2 = 8$

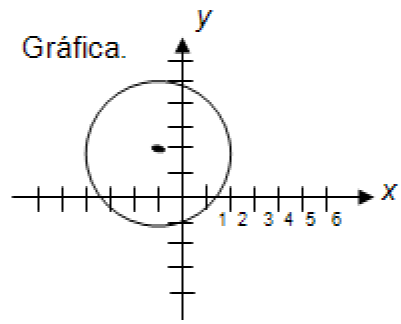
Ecuación (Forma general): $x^2 + y^2 - 8 = 0$

$r = \sqrt{8} = 2.8$

[2] Encontrar la ecuación (forma ordinaria y general) de la circunferencia con centro y radio indicados. Graficar

a) $C(-1,2)$
r = 3

Gráfica.



Ecuación (Forma ordinaria):

Fórmula: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Sustitución: $(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = (3)^2$

Ecuación ordinaria: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Ecuación (Forma general):

A partir de la ecuación ordinaria: $x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Desarrollando los binomios al cuadrado: $2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9$

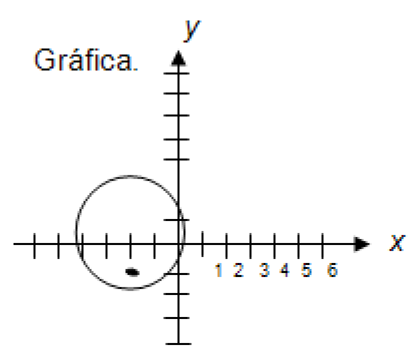
Igualando a cero la ecuación: $+ 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0$

Ordenando términos: $y^2 + 2x - 4y + 4 + 1 - 9 = 0$

Ecuación ger $\mathbf{x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0}$

b) $C(-2,-1)$
$r = \sqrt{5} = 2.2$

Gráfica.



Ecuación (Forma ordinaria):

Fórmula: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Sustitución: $(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{5})^2$

Ecuación ordinaria: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$

Ecuación (Forma general):

A partir de la ecuación ordinaria: $(x+2)^2+(y+1)^2=5$

Desarrollando los binomios al cu $x^2+4x+4+y^2+2y+1=5$

Igualando a cero la ecuación: $x^2+4x+4+y^2+2y+1-5=0$

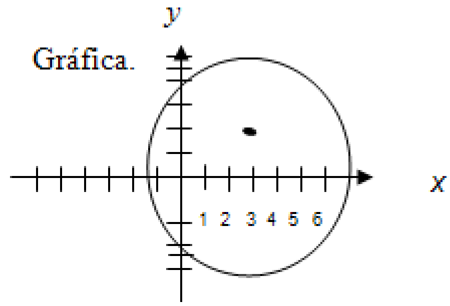
Ordenando términos: $x^2+y^2+4x+2y+4+1-5=0$

Ecuación gen $\boldsymbol{x^2+y^2+4x+2y=0}$

c) $C(3,2)$

$r=\frac{9}{2}$

Gráfica.



Ecuación (Forma ordinaria):

Fórmula: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Sustitución: $(x-3)^2+(y-2)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2$

Ecuación ordinaria: $(x-3)^2+(y-2)^2=\frac{81}{4}$

Ecuación (Forma general):

A partir de la ecuación ordinaria: $-3)^2+(y-2)^2=\frac{81}{4}$

Desarrollando los binomios al cuadrado: $5x+9+y^2-4y+4=\frac{81}{4}$

Igualando a cero la ecuación: $6x+9+y^2-4y+4-\frac{81}{4}=0$

Ordenando términos: $^2-6x-4y+9+4-\frac{81}{4}=0$

Ecuación general: $+y^2-6x-4y-\frac{29}{4}=0$

O bien multiplicando p $4x^2+4y^2-24x-16y-29=0$

CONVERSION DE FORMA GENERAL A FORMA ORDINARIA.

Si se conoce la ecuación general de la circunferencia es conveniente representarla en su forma canónica para identificar sus elementos: centro y radio, para ello estudiaremos como transformar la ecuación de una forma a otra.

La **ecuación** en su **forma general** de la circunferencia con centro en el origen y radio r, se represent $x^2+y^2-r^2=0$

Para representar esta ecuación en su **forma ordinaria**, se dejan los términos cuadráticos **x** e **y** en el miembro izquierdo pasando al lado derecho el término independiente **r** $x^2+y^2=r^2$

EJEMPLO: Convertir las ecuaciones de la circunferencia representadas en su forma general a su forma canónica:

FORMA GENERAL	**FORMA CANONÍCA**
a) $x^2 + y^2 – 16 = 0$	a) $x^2 + y^2 = 16$
b) $3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$	b) $3x^2 + 3y^2 = 15$
c) $x^2 + y^2 – 144 = 0$	c) $x^2 + y^2 = 144$
d) $x^2 + y^2 – 20 = 0$	d) $x^2 + y^2 = 20$
e) $8x^2 + 8y^2 – 200 = 0$	e) $8x^2 + 8y^2 = 200$
f) $10x^2 + 10y^2 – 1000 = 0$	f) $10x^2 + 10y^2 = 1000$

EJERCICIOS RESUELTOS

[1] Encontrar centro y radio de la circunferencia a partir de su ecuación indicada. Graficar.

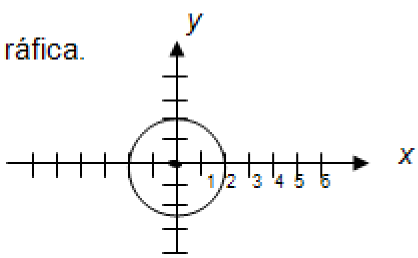
a) $x^2 + y^2 – 4 = 0$

Ecuación (Forma ordinaria):

$x^2 + y^2 = 4$

Centro: $C(0\ ,\ 0)$
Radio: $r = \sqrt{4} = 2$

ráfica.



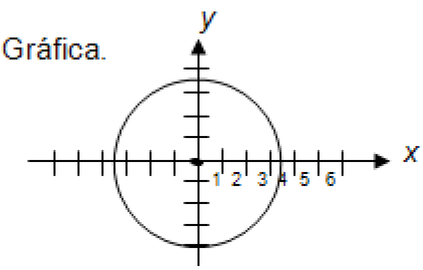
b) $x^2 + y^2 – 12 = 0$

Ecuación (Forma ordinaria):

$x^2 + y^2 = 12$

Centro: $C(0\ ,\ 0)$
Radio $r = \sqrt{12} = 3.46$

Gráfica.



NOTA:

Para completar una expresión algebraica de la forma : $x^2 + bx$ donde el coeficiente del término cuadrático es la unidad) a trinomio cuadrado perfecto, se divide el coeficiente del término lineal entre dos (que es $\frac{b}{2}$) y el cuadrado de este cociente (esto es $\left(\frac{b}{2}\right)^2$) se agrega como tercer término.

La **ecuación en su forma general** de la circunferencia con centro fuera del origen y radio r, se representa así: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Para transformar esta ecuación a su forma ordinaria, se hace lo siguiente:

1) Se agrupan los términos en **x** , los términos en **y,** pasando al miembro derecho el término independiente **F:** $(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$

2) Se completa a trinomio cuadrado perfecto cada una de las expresiones agrupadas, aumentando en el miembro derecho lo que se aumentó en el izquierdo:

$$\left(x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2\right) = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

3) Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos en sus binomios al cuadrado:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=-F+\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2$$

- 4) Se supone $\frac{D}{2}=-h ; \frac{E}{2}=-k$ y $-F+\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2=-F+h^2+k^2=r^2$

Obteniendo así la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen en su forma canónica u ordinaria: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

OBSERVACIÓN:

Para encontrar centro y radio de la circunferencia con centro fuera del origen a partir de la ecuación en su forma general se pueden seguir dos procedimientos:

1) Convertir la ecuación general a su forma canónica y a partir de esta identificar el centro y radio.
2) Utilizar las siguientes fórmulas, mismas que se obtienen del paso cuatro * anterior.

Centro: C $h=-\frac{D}{2}; k=-\frac{E}{2}$ entonces, $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ **Radio**: $r=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}$

EJEMPLO: Encontrar centro y radio de la circunferencia a partir de la ecuación general utilizando dos procedimientos:

Ecuación genei $x^2+y^2+2x-4y-11=0$

Procedimiento 1. Convertir a la forma canón

1) $(x^2+2x)+(y^2-4y)=11$
2) $(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=11+1+4$
$(x+1)^2+(y-2)^2=11+1+4$

A partir de la cual identificamos centro y rad

3) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$

Centro: $C(-1,2)$ **Radio**: $r=\sqrt{16}=4$ Ecuación (forma canónica)

Procedimiento 2. Utilizar las fórmulas anteriores:

De la ecuación general obtenemos D = 2, E = -4, F = -11

Ce $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)\rightarrow C\left(-\frac{2}{2},-\frac{(-4)}{2}\right)\rightarrow \boldsymbol{C(-1,2)}$

R $r=\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F}\rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2-(-11)}\rightarrow r=\sqrt{\frac{4}{4}+\frac{16}{4}+11}\rightarrow r=\sqrt{1+4+11}$

$$r=\sqrt{16}\rightarrow \boldsymbol{r=4}$$